Conclusion : pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $\varphi(x) = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2}$

Solution 11 :

1°/ $f(x) = \frac{(ax+b)(x-2)^2 + c}{(x-2)^2} = \frac{(ax+b)(x^2-4x+4)+c}{(x-2)^2}$

$= \frac{a \cdot x^3 - 4ax^2 + 4a \cdot x + bx^2 - 4bx + 4b + c}{(x-2)^2}$

$= \frac{a\ \ x^3 + x^2(b-4a) + x(4a-4b) + 4b + c}{(x-2)^2}$

d'où $\begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = -3 \\ 4a - 4b = 0 \\ 4b + c = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases}$

d'où $\forall x > 2$, $f(x) = x + 1 + \frac{3}{(x-2)^2}$.

2°/ f est continue sur $]2, +\infty[$ donc f admet au moins une primitive F définie sur $]2, +\infty[$:

$F(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{x-2} + k$.

or $F(3) = 0 \Rightarrow \frac{9}{2} + 3 - 3 + k = 0 \Rightarrow k = \frac{-9}{2}$.

Conclusion : $\forall x > 2$, $F(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{x-2} - \frac{9}{2}$.

Solution 12 :

1°/ $\forall x \in \mathbf{R}$, $x^4 + 1 > 0$ d'où $D_f = \mathbf{R}$.

f est continue sur $\mathbf{R}$ donc f admet au moins une primitive F définie sur $\mathbf{R}$